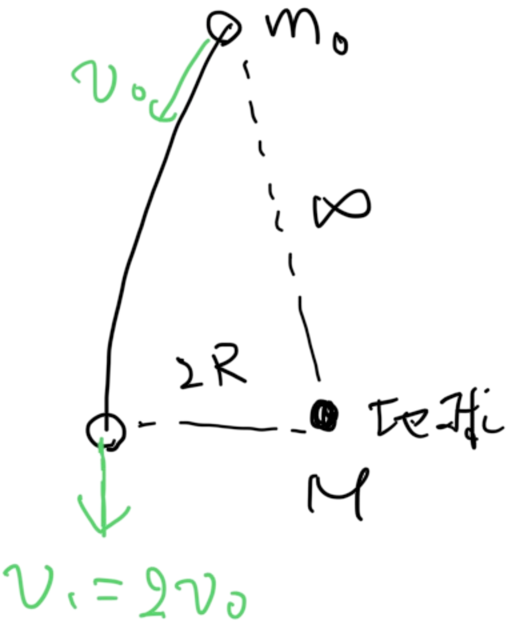
[1]

(1)




無限遠点とP点の間で力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m_0 v_0^2 = \frac{1}{2}m_0 v_1^2 - \frac{GMm_0}{2R}$$

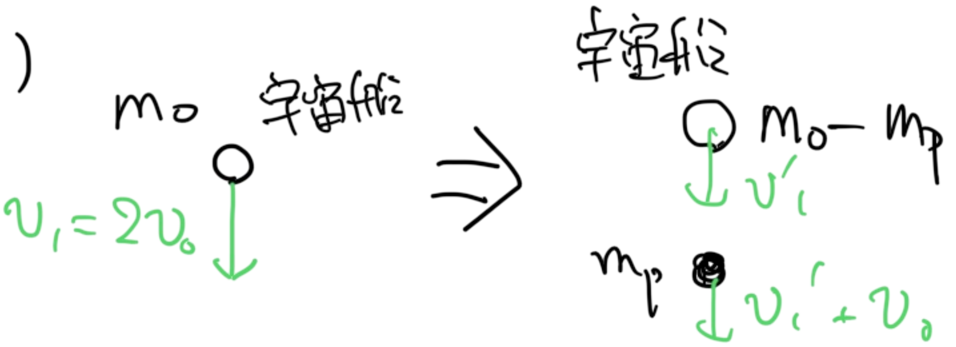
$$\Leftrightarrow \quad v_0^2 = v_1^2 - \frac{GM}{R}$$

$$= 4v_0^2 - \frac{GM}{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_0^2 = \frac{GM}{3R}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{GM}{3R}}$$

(2)




燃料ガスの速さは宇宙船に対する相対速度が$v_0$より

$v_1' + v_0$

噴射直前直後で時間$\Delta t \to 0$とみると力積はゼロ

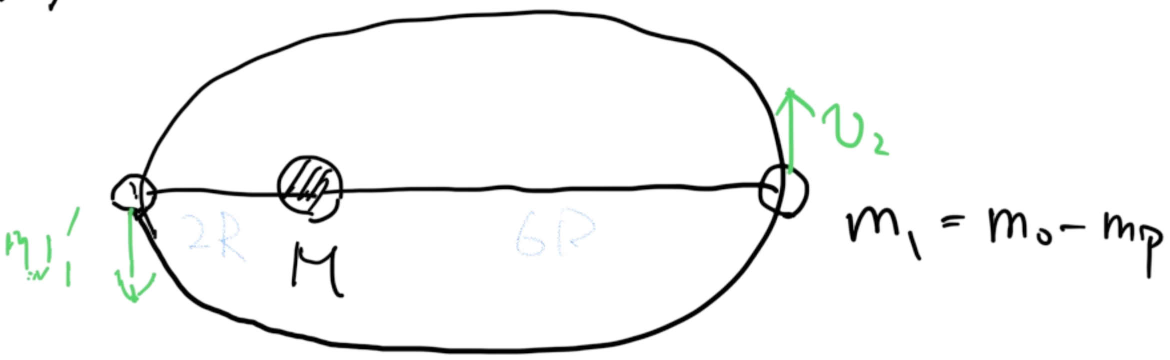
よって直前直後で運動量が保存する

$$2m_0 v_0 = (m_0 - m_p)v_1' + m_p(v_1' + v_0)$$

$$m_0 v_1' = (2m_0 - m_p)v_0$$

$$\therefore\ v_1' = \frac{2m_0 - m_p}{m_0} v_0$$

(3)




噴射後の宇宙船の質量を $m_1 = m_0 - m_p$ とおく

面積速度一定の法則より

$$\frac{1}{2}\cdot 2R \cdot v_1' = \frac{1}{2}\cdot 6R \cdot v_2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{v_2}{v_1'} = \frac{1}{3}$$

(4) 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 - \frac{GMm_1}{2R} = \frac{1}{2}m_1 v_2^2 - \frac{GMm_1}{6R}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}(v_1'^2 - v_2^2) = \frac{GM}{3R}$$

$v_2 = \frac{1}{3}v_1'$ より

$$\frac{1}{2}\times\frac{8}{9}v_1'^2 = \frac{GM}{3R}$$

$$\Longleftrightarrow \quad v_1'^2 = \frac{3GM}{4R}$$

$$\Longleftrightarrow \quad v_1' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3GM}{R}}$$

(5) (2)より

$$v_1' = \frac{2m_0 - m_p}{m_0}\sqrt{\frac{GM}{3R}}$$ になるので

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3GM}{R}} = \frac{2m_0 - m_p}{m_0}\sqrt{\frac{GM}{3R}}$$

$(\Leftrightarrow) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(2 - \frac{m_p}{m_0}\right) \times \sqrt{\frac{1}{3}}$

$(\Leftrightarrow) \quad \frac{3}{2} = 2 - \frac{m_p}{m_0}$

$(\Leftrightarrow) \quad \frac{m_p}{m_0} = \frac{1}{2}$