[IV] $I_n = \int_0^x t^n e^{-t} dt$

(1) $I_0 = \int_0^x e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x$

$= 1 - e^{-x}$

$I_1 = \int_0^x t e^{-t} dt$

$= \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt$

$= -xe^{-x} - \left[e^{-t}\right]_0^x$

$= -xe^{-x} - e^{-x} + 1$

(2) $I_n = \int_0^x t^n e^{-t} dt$

$= \left[-t^n e^{-t}\right]_0^x + \int_0^x n t^{n-1} e^{-t} dt$

$= -x^n e^{-x} + n I_{n-1}$

(3) 両辺を $n!$ でわると

$\frac{I_n}{n!} = -\frac{x^n e^{-x}}{n!} + \frac{I_{n-1}}{(n-1)!}$

$= \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

これが

$$\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{I_n}{n!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x}$$

によって数列 $\left\{\frac{I_n}{n!}\right\}$ は

階差数列となる

$n \geqq 1$ のとき

$$\frac{I_n}{n!} = \frac{I_0}{0!} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}e^{-x}$$

$$= 1 - e^{-x} - \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}$$

$$\therefore \quad I_n = n!\left\{1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}\right\}$$

$(n \geqq 1)$

これは $n=0$ のときもみたしている

$$I_n = n!\left\{1 - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}e^{-x}\right\}$$