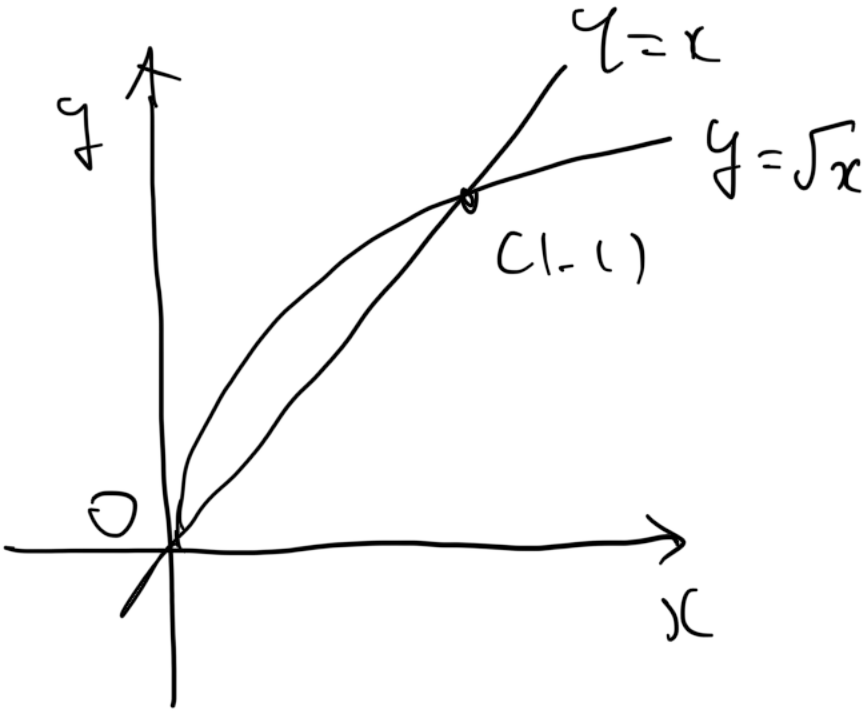
[Ⅱ]



は三角形の面積が ↓

(1) <ノーマルには>

$$\int_0^1 (\sqrt{x}-x)\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1$$

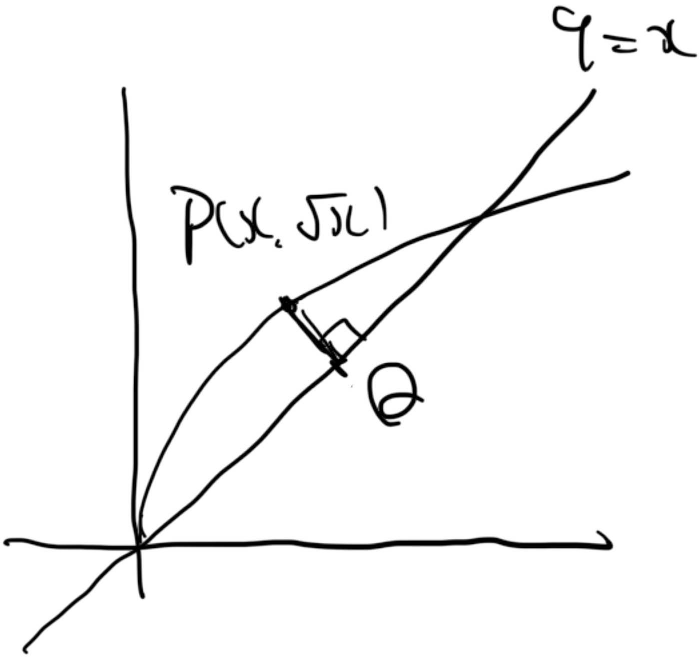
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

<$x=$ にみると2次関数>

$x=y$ と $x=y^2$ $(y>0)$ で囲まれた面積なので

$$\frac{1}{6}(1-0)^3 = \frac{1}{6}$$

(2)

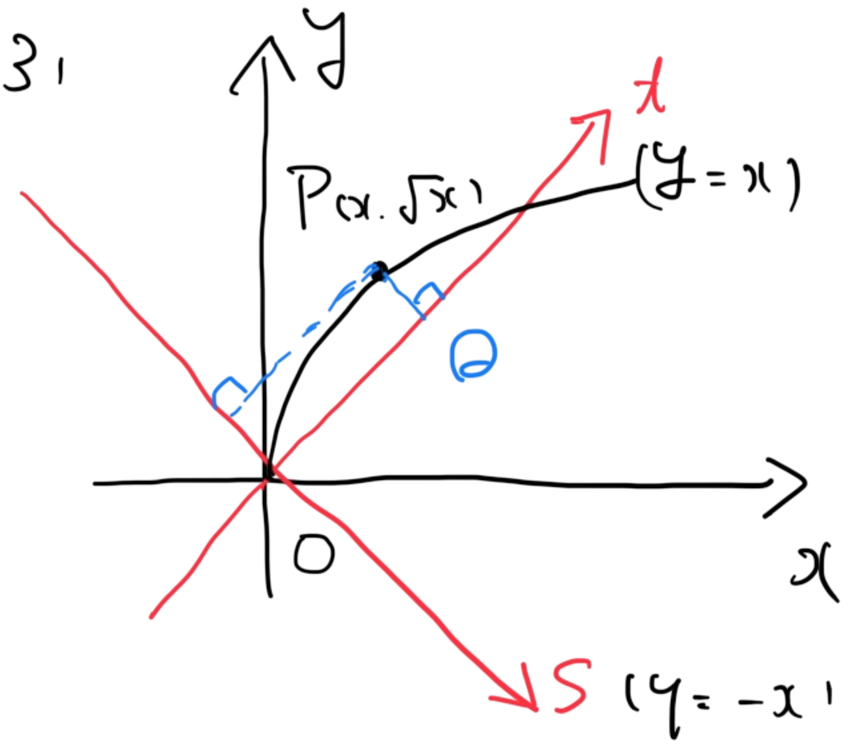


Pから $x-y=0$ へのキョリを求めるので

$$PQ = \frac{|x-\sqrt{x}|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}$$

($\because$ $0<x<1$ [illegible]
$\sqrt{x}>x$)

(3)



(2) より $PQ = \frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}$

また、P と $y=-x$ との距離は

$$\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{2}}$$

また、$y=\sqrt{x}$ と $y=x$ の原点以外の交点は (1, 1) であり、この交点と原点との距離は $\sqrt{2}$

ここで、$y=x$ を t 軸、$y=-x$ を s 軸に設定すると P 点の (s, t) 座標は $s<0$, $t>0$ より

$$s = -\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}$$

$$t = \frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{2}} \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

よって、求める体積 V は

$$V = \pi\int_0^{\sqrt{2}} s^2\,dt$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+1\right) = \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{2x}}$$

$$\begin{array}{c|c} t & 0 \longrightarrow \sqrt{2} \\ \hline x & 0 \longrightarrow 1 \end{array}$$

$$\therefore \quad V = \pi \int_0^1 \frac{(\sqrt{x}-x)^2}{2} \, \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{2x}} \, dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \int_0^1 (x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + x)(2 + x^{-\frac{1}{2}}) \, dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \int_0^1 (2x^2 - 3x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}}) \, dx$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

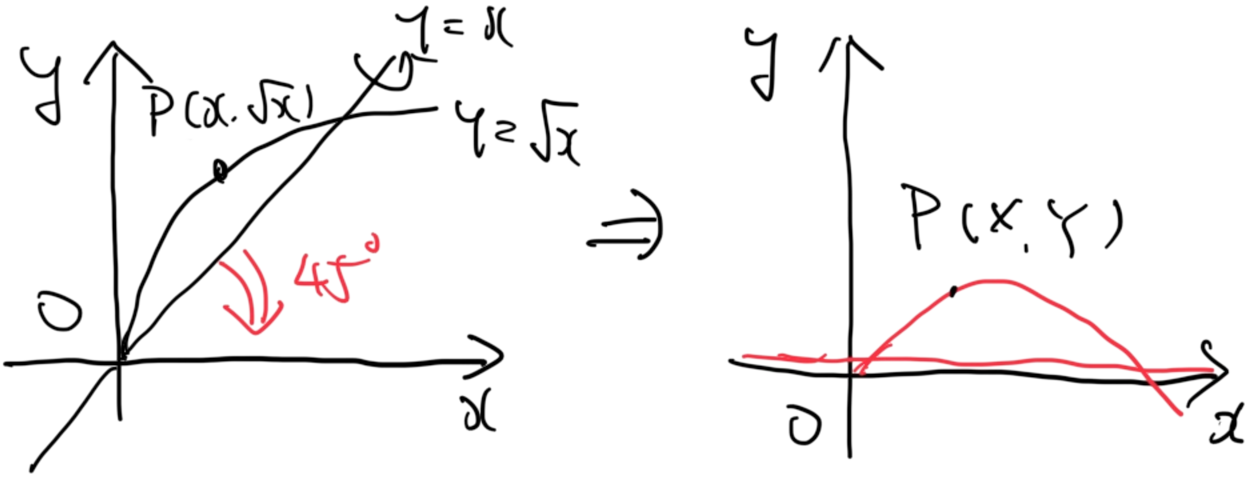
$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2}{3} - \frac{6}{5} + \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \times \frac{2}{15}$$

$$= \frac{\pi}{30\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{60}\pi$$

<ナナメ回転は図全体を回転させる>



y = x を原点中心に時計回りに 45° 回転させると x軸と重なる

また P(x, √x) を同様に回転させた点を P′(X, Y) とする。xy平面を複素数平面と同視すると

$$X+iY = (x+i\sqrt{x})(\cos 45^\circ - i\sin 45^\circ)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(x+i\sqrt{x})(1-i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\{(x+\sqrt{x})+i(-x+\sqrt{x})\}$$

$$\therefore\quad X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+\sqrt{x})$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+\sqrt{x})$$

ここで $Y=0 \iff -x+\sqrt{x}=0$

$\iff x = 0, 1$

$x=1$ のとき $X=\sqrt{2}$

求める体積 V は

$$V = \pi\int_0^{\sqrt{2}} Y^2\,dX$$

ここで

$$\frac{dX}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

X	$0 \to \sqrt{2}$
x	$0 \to 1$

より

$$V = \pi\int_0^1 \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+\sqrt{x})\right\}^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1 (x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + x)\left(1+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \times \frac{1}{15}$$

$$= \frac{\pi}{30\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{60}\pi \quad /\!/$$

ナナメ回転体の場合は

① 回転軸とそれに直交する方向とに新たに座標軸を設定する

② 回転軸をx軸もしくはy軸に一致するように図全体を回転させる

のいずれかを行います

その際、曲線のもとの座標をそのままパラメータとしてパラメータ表示の曲線の積分を行えば十分です