[II]

(1) <三角関数：展開で解く>

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1$$
$$= 2(2\cos^2\theta - 1)^2 - 1$$
$$= 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$$

∴ 与式 $\iff \cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 + 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1 = 0$

$\iff 8\cos^4\theta + 4\cos^3\theta - 6\cos^2\theta - 2\cos\theta = 0$

$\iff 2\cos\theta(4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1) = 0$

$\iff 2\cos\theta(\cos\theta + 1)(4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1) = 0$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < \cos\theta < 1$ よって求める $\cos\theta$ は

$4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$ の大きい方の解

$$\cos\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

ここでは $\theta = \frac{\pi}{2}$ が式をみたす（＝解である）ことに気づいていれば因数分解も容易に行える

<三角関数：和積公式の利用>

$$\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta+\cos4\theta=0$$

$$\Longleftrightarrow\ 2\cos\frac{5\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+2\cos\frac{5\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0$$

$$\Longleftrightarrow\ 2\cos\frac{5\theta}{2}\left(\cos\frac{3\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow\ 2\cos\frac{5}{2}\theta\times2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}=0$$

$$\Longleftrightarrow\ \cos\frac{\theta}{2}\cos\theta\cos\frac{5}{2}\theta=0$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より　$0<\cos\theta<1$

$0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4}$ より　$\frac{1}{\sqrt{2}}<\cos\frac{\theta}{2}<1$

これより　$\cos\frac{5}{2}\theta=0$ かつ $0<\frac{5}{2}\theta<\frac{5}{4}\pi$

$$\Longleftrightarrow\ \frac{5}{2}\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\Longleftrightarrow\ \theta=\frac{\pi}{5}$$

これによって $\cos\frac{\pi}{5}$ の値が求められる

$5\theta=\pi$ より　$3\theta=\pi-2\theta$

$$\therefore\ \cos3\theta=\cos(\pi-2\theta)=-\cos2\theta$$

$$\Longleftrightarrow\ 4\cos^3\theta-3\cos\theta=2\cos^2\theta-1$$

$$\Longleftrightarrow\ 4\cos^3\theta-2\cos^2\theta-3\cos\theta+1=0$$

$\Leftrightarrow (\cos\theta - 1)(4\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1) = 0$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta \neq 1$ より

$$\cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \quad \cos\theta > 0 \text{ より}$$

$$\cos\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

＜複素数を用いる方法＞

$z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおくとドモアブルの定理より

$\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta = 0$ は

$z + z^2 + z^3 + z^4$ の実部が 0 となる

$$z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{z(1 - z^4)}{1 - z}$$

ここで

$$\begin{aligned}
1 - z &= 1 - (\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= (1 - \cos\theta) - i\sin\theta \\
&= 2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\
&= 2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 2\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\frac{\pi - \theta}{2} - i\sin\frac{\pi - \theta}{2}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 - z^4 &= 1 - (\cos 4\theta + i\sin 4\theta) \\
&= 2\sin 2\theta\left\{\cos\frac{\pi - 4\theta}{2} - i\sin\frac{\pi - 4\theta}{2}\right\}
\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{z(1-z^4)}{1-z} = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)\cdot 2\sin 2\theta\left\{\cos\frac{\pi-4\theta}{2} - i\sin\frac{\pi-4\theta}{2}\right\}}{2\sin\frac{\theta}{2}\left\{\cos\frac{\pi-\theta}{2} - i\sin\frac{\pi-\theta}{2}\right\}}$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\left\{\cos\left(\theta - \frac{\pi-4\theta}{2} + \frac{\pi-\theta}{2}\right) + i\sin\left(\theta - \frac{\pi-4\theta}{2} + \frac{\pi-\theta}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\left\{\cos\frac{5}{2}\theta + i\sin\frac{5}{2}\theta\right\}$$

よってこの実部は0ということは $0 < \sin 2\theta < 1$ より

$\cos\frac{5}{2}\theta = 0$ となる

(以下、和積公式の解法の結末につづく)

この問題はストレートに展開しても十分解けるのだが

① $\theta = \frac{\pi}{5}$ であることに気づけない

② 高次方程式となる(この場合は4次式)

→ 因数定理で困るので解けないこともおこりうる

という難点があるので できれば和積や複素数で解く方が安全だし 今後の展開も見やすいと思います

(2) $2\cos\theta = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$1-2\cos\theta = 1-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

となるので

$2\cos\theta = \alpha$, $1-2\cos\theta = \beta$ とおくと

α, β は $\alpha+\beta = 1$

$\alpha\beta = -1$

よって $x^2 - x - 1 = 0$ の2解であり

$a_n = \alpha^n + \beta^n$ となる。

$\therefore$ $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

α^n をかけて

$\alpha^{n+2} - \alpha^{n+1} - \alpha^n = 0$

同様に

$\beta^{n+2} - \beta^{n+1} - \beta^n = 0$

辺々加えて

$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$

$\Leftrightarrow$ $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

(3)

$$\ell_n = (-1)^n \{ a_n a_{n+2} - (a_{n+1})^2 \}$$

$$= (-1)^n \{ a_n (a_{n+1} + a_n) - a_{n+1}^2 \}$$

$$= (-1)^n \{ a_n (a_{n+1} + a_n) - a_{n+1} (a_n + a_{n-1}) \}$$

$$= (-1)^n (a_n a_{n+1} + a_n^2 - a_n a_{n+1} - a_{n+1} a_{n-1})$$

$$= (-1)^n (a_n^2 - a_{n+1} a_{n-1})$$

$$= (-1)^{n-1} (a_{n+1} a_{n-1} - a_n^2)$$

$$= \ell_{n-1}$$

よって

$$\ell_n = \ell_{n-1} = \ell_{n-2} = \cdots = \ell_1 = -(a_1 a_3 - a_2^2)$$

ここで $a_3 = a_2 + a_1$ より

$$\ell_n = \ell_1 = -\{ a_1 (a_1 + a_2) - a_2^2 \}$$

$$= a_2^2 - a_1 a_2 - a_1^2$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha + \beta)^2$$

$\alpha + \beta = 1.\ \alpha\beta = -1$

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3$ より

$$l_n = l_1 = 3^2 - 1\cdot 3 - 1^2$$
$$= 9 - 3 - 1 = 5 \;/\!/$$

a_nを下げていくときに少し工夫がいるね。
1つ1つ代入してゆっくりと下げていきましょう
1つずつ下がった式をイメージしてやっていくといいね
結果はα, βの対称式になってるので
$\alpha+\beta$、$\alpha\beta$で処理を行い、まちがっても$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$という
ややこしい数字は用いないことだね